دربارهٔ اصل تمامیت (کمال)

اسمعیل بابلیان
عضو هیئت علمی دانشگاه خوارزمی

مقدمه

یکی از اصول مهم، که مجموعه اعداد حقیقی توسط آن مشخص می‌شود، اصل تمامیت[۱] است. این اصل به مفاهیم زیادی مربوط می‌شود، و همین امر سبب می‌شود که مطرح کردن و آموزش آن در دبیرستان با مشکل روبه‌رو باشد. این اصل با مفاهیمی چون مجموعه‌های متناهی[۲]، نامتناهی[۳] و کراندار[۴]، ماکسیمم[۵]، مینیمم[۶]، کران بالا[۷]، کران پایین[۸]، سوپریمم[۹] و اینفیمم[۱۰] یک مجموعه غیرخالی[۱۱]، حد دنباله‌های[۱۲] اعداد و بالاخره حد دنباله‌های یکنوا[۱۳] و کراندار مرتبط است.

در این نوشتار سعی شده است، ضمن ارائهٔ چند تعریف، قضیه و مثالِ مقدماتی ارتباط اصل تمامیت را با این مفاهیم نشان دهیم و تاحدودی موضوع و نحوهٔ آموزش آن را روشن کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم N مجموعهٔ اعداد طبیعی[۱۴] باشد، برای عدد طبیعی k داریم:

$N_k=\{۱,۲,...,k\}$

ضمناً، فرض می‌کنیم R نماد مجموعهٔ اعداد حقیقی[۱۵] و Q نماد اعداد گویا[۱۶] باشد. فعلاً، می‌دانیم که $Q\subset R$ و هدف این است که نشان دهیم Q، به مفهومی که به آن خواهیم پرداخت، کامل نیست و با اصلی که قابل اثبات نیست آن را کامل خواهیم کرد تا R حاصل شود.

کلیدواژه‌ها: اصل تمامیت، کمال، تمامیت

تعریف ۱: مجموعه غیرخالی A را متناهی گوییم در صورتی که عدد طبیعی k یافت شود به قسمی که A با N_k هم‌عدد باشد، و می‌نویسیم $A\approx N_k$؛ یعنی تناظری یک‌به‌یک بین A و N_k برقرار باشد. مجموعهٔ ϕ (تهی) را نیز متناهی می‌گیریم و هر مجموعه که متناهی نباشد نامتناهی نامیده می‌شود.

مثال ۱: مجموعه‌های زیر نمونه‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی را مشخص می‌کنند:

الف: $A=\{n\in N \mid n<10 \,,\, n \text{ عددی اول است}\} \approx N_4$

ب: $B=\{2k \mid k\in N \,,\, k<100\} \approx N_{49}$

پ: مجموعهٔ $C=\{$اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰۰$\}$ متناهی است.

ت: مجموعهٔ $D=\{x\in C \mid 10<x<100\}$ متناهی است.

ث: مجموعهٔ $E=\{(-1)^n \mid n\in N\}$ متناهی و دارای دو عضو ۱ و ۱- است.

ج: مجموعهٔ $F=\{\frac{1}{n} \mid n\in N\}$ متناهی نیست و با N هم‌عدد است.

از این‌ها نتیجه می‌شود که

«هر زیر مجموعه از یک مجموعهٔ متناهی، متناهی است.»

زیرا، ϕ و هر زیرمجموعهٔ ناتهی از N_k متناهی است.

اگر A ناتهی و متناهی باشد کوچک‌ترین عضو آن را مینیمم A و بزرگ‌ترین عضو آن را ماکسیمم A می‌نامیم.

تعریف ۲: اگر $\phi\neq A\subseteq R$، یعنی A زیرمجموعهٔ ناتهی از R باشد، آن‌گاه $u\in R$ را یک کران بالای A نامیم در صورتی که،

$\forall x\in A: x\leq u,$

به‌علاوه، اگر $u\in A$ آن‌گاه u را ماکسیمم A نامیم.

به همین ترتیب، $l\in R$ را یک کران پایین A نامیم اگر:

$\forall x\in A: l\leq x,$

به‌علاوه، اگر $l\in A$ آن‌گاه l را مینیمم A می‌نامیم.

تبصره: کران بالا (پایین) یکتا نیست.

مثال ۲: اگر A بازهٔ $(-1,2]$ باشد، هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۲ یک کران بالای A است. مجموعه کران‌های بالای A بازه $[2,\infty)$ است. مجموعهٔ کران‌های پایین A نیز $(-\infty,-1]$ است.

تعریف ۳: $\phi\neq A\subseteq R$ را کراندار نامیم اگر $l,u\in R$ یافت شوند به قسمی که

$\forall x\in A: l\leq x\leq u$

پس

قضیه ۱: اگر A زیرمجموعه‌ای متناهی از R باشد، A کراندار است (چرا؟).

عکس قضیه ۱ برقرار نیست. به عبارت دیگر اگر A زیرمجموعه‌ای کراندار از R باشد. ممکن است متناهی نباشد. مثلاً اگر

$A=\{\frac{1}{n}, n\in N\},$

به سادگی معلوم می‌شود که:

$\forall x\in A: 0\leq x\leq 1$

بنابراین، A کراندار است ولی می‌دانیم که A با N هم‌عدد است و لذا متناهی نیست. همچنین بازهٔ (a,b) که $a<b$ و $a,b\in R$ یک مجموعه کراندار ولی نامتناهی است. به‌علاوه، این مجموعه با R هم‌عدد است.

به مثال‌های زیر با تأمل توجه کنید و تفاوت‌های آن‌ها را با دقت شناسایی کنید.

مثال ۵: فرض کنید

$$C=\{\frac{n}{n+1} \mid n\in N\}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که:

$\forall x\in C: \frac{1}{2}\leq x<1$

هر عدد کوچک‌تر یا مساوی $\frac{1}{2}$ یک کران پایین است و هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی یک کران بالایی برای C است. C ماکسیمم ندارد ولی مینیمم آن $\frac{1}{2}$ است.

مثال ۳: فرض کنید

$$A=\{-\frac{1}{n} \mid n\in N\}$$

در نتیجه داریم

$\forall x\in A: -1\leq x<0,$

A عضو ماکسیمم ندارد ولی ۱- مینیمم A است.

آیا $\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n})$ با کران بالای A ارتباطی دارد؟

مثال ۴: اگر

$$B=\{\frac{n+1}{n}|n\in N\}$$

آن‌گاه به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$\forall x\in B: 1<x\le 2,$

مجموعه B دارای مینیمم نیست ولی ماکسیمم آن برابر ۲ است. آیا $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$ با کران پایین C ارتباط دارد؟

مثال ۵: اگر $E=\{\frac{(-1)^n n}{n+1}|n\in N\}$ آن‌گاه با در نظر گرفتن اعضای مثبت و منفی E داریم:

$\forall x\in E: -1<x<1$

مجموعه E نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم (چرا؟).

مثال ۶: فرض کنید $F=\{(-1)^n n| n\in N\}$. به سادگی می‌توان دریافت که F نه از بالا و نه از پایین کراندار نیست. این مجموعه نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم (چرا؟).

مثال ۷: فرض کنید Q^+ مجموعهٔ اعداد گویای مثبت باشد. بدیهی است که Q^+ از بالا کراندار نیست ولی از پایین به صفر کراندار است. Q^+ نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم.

تعریف ۴: کوچک‌ترین (بزرگ‌ترین) کران بالای (پایین) مجموعهٔ غیرتهی A سوپریمم (اینفیمم) A نامیده می‌شود.

ویژگی‌های مشخصه سوپریمم، که از تعریف بالا نتیجه می‌شود و در اثبات اینکه عدد u سوپریمم مجموعه A است از آن‌ها استفاده می‌شود، به قرار زیر است:

الف: $\forall x\in A: x\le u;$

ب: $\forall \varepsilon>0\ \exists x\in A: u-\varepsilon<x$

ویژگی‌های مشخصه اینفیمم نیز، که در اثبات اینکه عدد l اینفیمم مجموعه A است به‌کار می‌روند، به قرار زیر است:

پ: $\forall x\in A: l\le x;$

ت: $\forall \varepsilon>0: x<l+\varepsilon$

برای تعیین سوپریمم یا اینفیمم برخی مجموعه‌ها، به خاصیت ارشمیدسی اعداد نیز نیاز داریم:

قضیهٔ ۲ (خاصیت ارشمیدسی اعداد طبیعی): به ازای هر $\varepsilon>0$ عدد طبیعی m هست که

$$\frac{1}{m}<\varepsilon$$

اثبات این قضیه با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ به‌دست می‌آید.

بهتر است مثال‌هایی همانند دو مثال ذیل ارائه شود که شامل اثبات نیز باشد.

مثال ۸: فرض کنید:

$$A=\{\frac{n}{n+1}|n\in N\},$$

نشان دهید که سوپریمم A برابر یک است.

حل: برای هر x از A، $x<1$. اینک فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ دلخواه باشد طبق قضیهٔ ۲، عدد m هست که $\frac{1}{m}<\varepsilon$ بنابراین:

$$1-\varepsilon<1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m}<\frac{m}{m+1}\in A$$

لذا، بنابر ویژگی‌های مشخصهٔ سوپریمم، سوپریمم A برابر یک است. توجه کنید که سوپریمم A مساوی $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$ است.

مثال ۹: فرض کنید

$$B=\{\frac{n+1}{2n}|n\in N\},$$

نشان دهید که اینفیمم B برابر $\frac{1}{2}$ است.

حل: برای هر x از B، $\frac{1}{2}\le x$ و اگر $\varepsilon>0$ دلخواه باشد بنابر قضیه ۲، عدد طبیعی m هست که $\frac{1}{m}<2\varepsilon$ اما می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2m}<\varepsilon, \frac{1}{2}+\frac{1}{2m}=\frac{m+1}{2m}\in B, \frac{1}{2}+\frac{1}{2m}<\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

یعنی، ویژگی‌های اینفیمم در مورد $\frac{1}{2}$ و اعضای B برقرار است. ضمناً، $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$. اصل تمامیت، تاحدودی، ارتباط تنگاتنگ با حالت کلی اتفاقاتی دارد که در مثال‌های ۸ و ۹ با آن‌ها مواجه شدید. یعنی، مجموعه‌هایی (با دنباله‌هایی) از اعداد که اینفیمم یا سوپریمم (حد) آن‌ها به آن مجموعه‌ها تعلق ندارد.

البته وقتی مثال‌ها مشکل‌تر می‌شوند اثبات‌ها نیز پیچیده می‌شوند یا اساساً نمی‌توان اثباتی ارائه کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰: فرض کنید

$A=\{x\in Q^{+}|x^{2}<2\}$

A از بالا کراندار است، مثلاً به عدد ۱/۵، و هر عدد بزرگ‌تر از آن. در واقع سوپریمم A عدد اصم $\sqrt{2}$ است که به A تعلق ندارد. می‌توان دنباله‌ای از اعضای A ارائه کرد که حد آن $\sqrt{2}$ باشد، به این طریق:

$a_1=1\ ,\ a_2=1/4,\ a_3=1/41,\dots ,$

$a_n=$ قطع شدهٔ بسط اعشاری $\sqrt{2}$ تا n رقم اعشار

به این ترتیب، همواره $a_n\in A$ و $\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$. توجه کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار است. برای اطلاعات بیشتر در مورد این مثال به [۱ ص ۲۹۷] مراجعه کنید.

مثال ۱۱: فرض کنید

$B=\{x\in Q^{+}\mid 5<x^{2}\}$

B از پایین کراندار است، مثلاً، به عدد ۲ و هر عدد مثبت کوچک‌تر از آن. مجدداً می‌توان دنباله‌ای نزولی از اعداد گویا ساخت که حد آن $\sqrt{5}$ باشد که در ضمن اینفیمم B نیز هست (چگونه؟).

برای حل مشکلاتی که در اثبات وجود سوپریمم (اینفیمم) برای مجموعه‌های کراندار وجود دارد، و در ضمن برای رفع این نقص از اعداد گویا (که برخی زیرمجموعه‌های کراندار آن سوپریمم یا اینفیمم غیرمتعلق به آن دارند) و ساختن مجموعهٔ اعداد حقیقی، اصل تمامیت وضع شده است.

اصل تمامیت: هر زیرمجموعه غیرخالی از اعداد حقیقی که از بالا (پایین) کراندار باشد سوپریمم (اینفیمم) دارد. اگر سوپریمم (اینفیمم) A به A تعلق داشته باشد A ماکسیمم (مینیمم) دارد.

با استفاده از اصل تمامیت می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

این قضیه در اثبات وجود حد دنباله‌های یکنوا، بدون دانستن حد آن‌ها، بسیار مفید و حیاتی است.

قضیه ۳: هر دنبالهٔ یکنوا و کراندار از اعداد حقیقی حد دارد. به عبارت دیگر، هر دنبالهٔ صعودی (نزولی) از اعداد حقیقی که از بالا (پایین) کراندار باشد حد دارد.

برهان: بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کراندار از اعداد حقیقی باشد. ثابت می‌کنیم اگر

$A=\{a_i\mid i\in N\}$

آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n$ مساوی سوپریمم A است. اولاً چون A غیرخالی و از بالا کراندار است سوپریمم دارد که آن را با α نمایش می‌دهیم. بنابراین، همواره $a_n\leq\alpha$. حال فرض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه باشد. چون $\alpha-\varepsilon<\alpha$، بنابر ویژگی (ب) سوپریمم، عضوی از A مانند a_N هست که $\alpha-\varepsilon<a_N$.

چون دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی است پس اگر $n\geq N$ آن‌گاه $\alpha-\varepsilon<a_N\leq a_n$.

بنابراین، اگر $n\geq N$ آنگاه $|\alpha-a_n|<\varepsilon$ و در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$$

به هر جهت نباید انتظار داشت که دانش‌آموزان به‌طور عمیق مفاهیم سوپریمم و اینفیمم را درک کنند، لذا بایستی سعی کرد تا حد امکان از اطلاعات آن‌ها در مورد اعداد صحیح و گویا کمک گرفت و این دو مفهوم مهم و کلیدی از آنالیز ریاضی را برای آن‌ها تشریح نمود.

در زیر نمونه‌هایی از دنباله‌های اعداد گویا را ملاحظه می‌کنید که بنابر قضیهٔ ۳ حد دارند و قادریم حد آن‌ها را به‌دست آوریم [۲].

مثال ۱۲: فرض کنید α عددی مثبت باشد و دنباله $\{a_n\}$ با $a_1>0$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+\alpha}{2a_n}, n=1,2,...,$$

آیا این دنباله حد دارد؟

ملاحظه می‌کنیم که:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{\alpha-an^2}{2an},$$

صعودی یا نزولی بودن دنباله به علامت $\alpha-a_n^2$ بستگی دارد. اما داریم:

$$a_{n+1}^2-\alpha=\frac{a_n^4+\alpha^2+2\alpha a_n^2}{4a_n^2}-\alpha=\frac{(a_n^2-\alpha)^2}{4a_n^2}\ge 0,$$

بنابراین، $a_1>0$ هرچه باشد $a_n^2\ge\alpha$ برای $n\ge 2$ و در نتیجه

$$a_{n+1}-a_n\le 0\ ,\ n\ge 2,$$

و $\{a_n\}_{n=2}$ نزولی است. ضمناً، همواره $a_n>0$ پس، $\{a_n\}_{n=2}$ نزولی و از پایین به صفر کراندار است. بنابر قضیهٔ ۳، این دنباله حد دارد و به سادگی معلوم می‌شود که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{\alpha}$.

مثال ۱۳: فرض کنید $\alpha>0$ عددی حقیقی و ثابت باشد، $x_1>0$ و

$$x_{n+1}=2x_n-ax_n^2,\quad n\ge 1,$$

آیا این دنباله حد دارد؟

ملاحظه می‌کنیم که

$$x_{n+1}-x_n=\alpha x_n(\frac{1}{\alpha}-x_n).$$

بنابراین علامت $\frac{1}{\alpha}-x_n$، صعودی یا نزولی بودن این دنباله را مشخص می‌کند.

اما داریم:

$$x_{n+1}-\frac{1}{\alpha}=2x_n-\alpha x_n^2-\alpha=-\frac{1}{\alpha}(\alpha^2x_n^2-2\alpha x_n+1)$$
$$=-\frac{1}{\alpha}(\alpha x_n-1)^2\le 0$$

یعنی، صرف‌نظر از مقدار x_1 داریم: $x_n\le\frac{1}{\alpha}$ برای $n\ge 2$.

بنابراین، همواره $x_{n+1}-x_n\ge 0$ و دنبالهٔ $\{x_n\}$ صعودی است و از بالا به $\frac{1}{\alpha}$ کراندار است. پس، دنباله بنا به قضیهٔ ۳ همگراست. با حدگیری نتیجه می‌شود: $\lim x_n=\frac{1}{\alpha}$.

توجه کنید که جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ با اعمال ضرب و تفریق به‌دست می‌آیند، یعنی x_nها تقریب‌هایی از $\frac{1}{\alpha}$، بدون انجام عمل تقسیم، ارائه می‌کنند. مثلاً اگر $\alpha=3$ و $x_1=0/3$، داریم:

$$x_2=0/6-0/27=0/33$$
$$x_2=0/66-0/3267=0/3333$$
$$x_3=0/33333333$$

کاربرد اصلی قضیه ۳ در مثال زیر مشخص می‌شود، گرچه این مثال برای دانش‌آموزان مناسب نیست چون اطلاعی از لگاریتم در مبنای e، عدد نپر[17]، ندارند.

مثال ۱۴: فرض کنید:

$$x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1), n\ge 1,$$

آیا این دنباله حد دارد؟

حل: ملاحظه می‌کنیم که:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)$$
$$=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n+1})$$

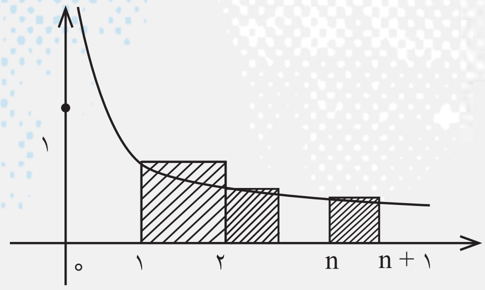
با استفاده از تابع $f(x)=x-\ln(1+x)$ برای $x\ge 0$ داریم:

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\ge 0$$

یعنی تابع f صعودی اســت و چون $f(۰)=۰$ پس همواره $f(x)\geq ۰$. بنابراین:

$x_{n+۱}-x_n>۰$،

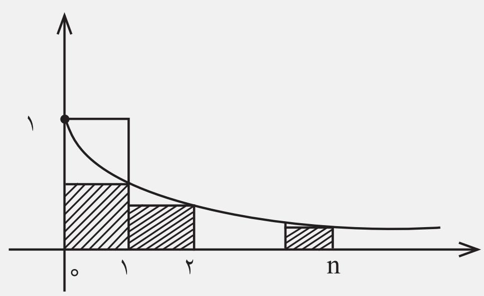
یعنی، $\{x_n\}$ صعودی است. اینک به شکل‌های زیر و نتایج مربوط به آن‌ها توجه کنید.



$g(x)=\frac{۱}{x}$

$$\int_{۱}^{n+۱}\frac{dx}{x}=\ln(n+۱)<۱+\frac{۱}{۲}+...+\frac{۱}{n}$$

یعنی همواره $x_n>۰$



$h(x)=\frac{۱}{۱+x}$

$$\frac{۱}{۲}+...+\frac{۱}{n}<\frac{۱}{۲}+...+\frac{۱}{n+۱}<\int_{۰}^{n}\frac{dx}{۱+x}=\ln(۱+n)$$

پس همواره

$$x_n=۱+[(\frac{۱}{۲}+...+\frac{۱}{n})-\ln(۱+n)]<۱$$

بنابراین، دنبالــه $\{x_n\}$ صعــودی و از بالا کراندار است، لذا، بنابر قضیه ۳ حد دارد. به علاوه چون همواره $x_n>۰$ و دنباله صعودی است پس حد آن عددی مثبت اســت. حد دنباله $\{x_n\}$ با عدد γ نمایش داده می‌شود. عدد γ را **ثابت اویلر**[۱۸] **ـ ماشرونی** نامند و

$$\lim_{x\to\infty} x_n=\gamma=۰/۵۷۷۲۱۵۶۶۴۹۰۱...$$

جالب است بدانید که هنوز ثابت نشده است که γ عددی اصم است. [۲]

پی‌نوشت‌ها

1. Completeness
2. Finite
3. Infinite
4. Bounded
5. Maximum
6. Minimum
7. Upper bound
8. Lower bound
9. Superemum
10. Infimum
11. Nonempty
12. Sequences
13. Monotone
14. Natural
15. Real
16. Rational
17. Nepier
18. Euler-Mascheroni

منابع

۱. مصاحب، غلامحســین، **«آنالیز ریاضی، جلد اول تئوری اعداد حقیقی»**، مؤسسه انتشــارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۱.

۲. بابلیان، اسمعیل، **«مبانی آنالیز عددی»**، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۲.

3. Bailey, D. H. **"Numerical Results on the Transcendence of constants π, e , and Euler's Constant"** math. Comput. 50, 275-281, 1988.